Студенческая олимпиада по математике, 2008 год

1. Доказать, что для любой матрицы $A = ||a_{ij}||$ выполняется неравенство

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}.$$

2. На какую максимальную степень двойки делится число $5^{2^n} - 1$, где n — целое неотрицательное число?

3. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{при } x \geq 0 \\ 2 & \text{при } x < 0 \end{cases} .$$

Положим $f^{(1)} = f(x)$, $f^{(k+1)}(x) = f(f^{(k)}(x))$ при всех $k \geq 1$. Сколько точек разрыва имеет функция $f^{(n)}(x)$?

4. Есть широко известный афоризм Козьмы Пруткова: "Где начало того конца, которым оканчивается начало?"Попробуем ответить на этот вопрос с точки зрения теории вероятностей. Возьмём отрезок AB единичной длины и бросим на него случайно и равномерно точку C, которая задаст нам его “начало"AC (понимаемое как "начальный сегмент"). Затем на отрезок AC бросим случайно и равномерно точку D, которая задаст нам его “конец"DC (то есть "конечный сегмент"). Осталось определить, где его начальная точка D будет находиться "в среднем", то есть требуется найти математическое ожидание соответствующей случайной величины. Для удобства можно считать, что A и B — это концы отрезка $[0, 1]$ на числовой прямой.

5. Найти функцию f, если известно, что при всех $x \neq 0$ выполняется равенство

$$(x + 1)f(x) = 1 - f\left(\frac{1}{x}\right).$$

6. Найти следующую сумму величин, обратным числам, входящим в треугольник Паскаля:

$$\sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=2}^{n-2} \frac{1}{C_n^m}.$$

7. Вычислить

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{2}}}\,.$$

8. Найти все пары чисел (a, b), для которых параболы, заданные уравнениями $y = x^2 + a$ и $x = y^2 + b$, касаются друг друга в некоторой точке.