Решения задач

1. Пусть площади квадратов равны x и $1-x$; можно считать, что $x \geq 1/2$. Их можно разместить без наложений в прямоугольнике размером $\sqrt{x}$ на $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ и нельзя разместить в прямоугольнике меньшей площади.

Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})=x+\sqrt{x-x^2}$ и найдём её наименьшее значение на отрезке $[1/2,1]$. Найдём критические точки функции на этом отрезке. Они удовлетворяют условию

$$f'(x)=1+\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}=0,$$

что приводит к уравнению $2x-1=2\sqrt{x-x^2}$, что равносильно $4x^2-4x+1=4x-4x^2$ или $4x^2-4x=-1/2$, что можно записать также в виде $(2x-1)^2=1/2$. С учётом $x\in[1/2,1]$, это даёт значение $x_0=(2+\sqrt{2})/4$ для единственной критической точки. Сравнивая значение $f(x_0)=x_0+\sqrt{x_0-x_0^2}=x_0+(2x_0-1)/2=(1+\sqrt{2})/2$ со значениями функции на концах отрезка, равными $f(1/2)=f(1)=1$, получаем, что оно является наименьшим.

Ответ: $S=(1+\sqrt{2})/2$.

2. Проводим индукцию по n. При $n=1$ утверждение очевидно. Рассмотрим проекцию точек на первые $n-1$ координат. Если совпадений нет, то искомая проекция найдена. Если совпадения есть, то получаем не более $n-1$ точки в $(n-1)$-мерном кубе. По предположению индукции, их можно спроектировать на i-ю координату так, что все их проекции будут различны $(1\leq i<n)$. Но тогда проекция изначальных n точек на i-ю координату будет искомой. Действительно, спроектированные точки либо отличаются n-й координатой, либо у них различаются первые $n-1$ координат, но тогда проекции на i-ю координату различны по построению.

3. Легко видеть, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} (a+1)^{n-1} & (a+1)^{n-1} \\ a(a+1)^{n-1} & a(a+1)^{n-1} \end{pmatrix},$$

откуда при $a=1/n$, с учётом того факта, что $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n=e$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

4. Векторная случайная величина (ξ, η) равномерно распределена на единичном квадрате $[0,1]^2$, поэтому её математическое ожидание составляет

$$\int\int_{x\le y} y\,dx\,dy + \int\int_{y\le x} x\,dx\,dy = 2\int\int_{x\le y} y\,dx\,dy,$$

что при переходе к повторным интегралам даёт

$$2\int_0^1 dx \int_x^1 y\,dy = 2\int_0^1 \frac{1-x^2}{2}\,dx = x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Ответ: 2/3.

5. Ломаная однозначно задаётся словом над алфавитом $\{\, x, y, z \,\}$. Она будет искомой, если в слове нет двух непустых стоящих подряд подслов с одинаковым набором букв. В частности, никакие две одинаковые буквы не следуют друг за другом. С учётом этого, можно считать, что слово начинается с xy, составляя далее дерево всевозможных продолжений. Например, после xy может идти буква x или буква z. Это приводит к следующему списку максимальных возможных продолжений:

a) $xyxzxyx$
b) $xyxzyxy$
c) $xyxzyz$
d) $xyzxyx$
e) $xyzxz$
f) $xyzyxyz$

Максимальная длина такого слова, то есть число звеньев ломаной, равно 7.

Ответ: $n = 7$.

6. Известно, что число π иррационально. Докажем такой вспомогательный факт, представляющий самостоятельный интерес: *всякое иррациональное число x можно бесконечным числом способов приблизить рациональными с "двойной точностью", то есть указать бесконечно много рациональных дробей вида P/Q так, что $|x - P/Q| < 1/Q^2$.*

Итак, пусть $x \notin \mathbb{Q}$. Поскольку x расположено между двумя целыми числами вида k и $k+1$, то выполняется двойное неравенство $c/d < x < a/b$ при $b = d = 1$, $c = k$, $a = k+1$. Очевидно, что при этом $ad - bc = 1$; интервалы вида $(c/d, a/b)$, для которых $ad - bc = 1$ и $b, d \in \mathbb{N}$ будем называть *подходящими* (для x). Длина такого интервала равна $a/b - c/d = (ad-bc)/bd = 1/bd$. Следовательно, a/b и c/d будут рациональными приближениями для x с точностью менее $1/bd$, и потому хотя бы в одном из случаев получается "двойная точность"(берём из двух дробей ту, у которой знаменатель минимален).

Итак, мы установили, что x принадлежит хотя бы одному подходящему интервалу вида $(c/d, a/b)$. Рассмотрим теперь дробь $(a+c)/(b+d)$. При этом $(a+c)/(b+d) - c/d = (ad-bc)/d(b+d) = 1/d(b+d) > 0$, а потому интервал $(c/d, (a+c)/(b+d))$ также будет подходящим. Аналогично, $a/b - (a+c)/(b+d) = (ad-bc)/b(b+d) = 1/b(b+d) > 0$, то есть интервал $((a+c)/(b+d), a/b)$ – тоже подходящий. Ясно, что число x, будучи иррациональным, принадлежит в точности одному из двух новых интервалов. Продолжая этот процесс далее, мы находим бесконечно много интервалов, подходящих для x.

Итак, число π можно приблизить с "двойной точностью"дробями вида P/Q со сколь угодно большими значениями для P и Q. Пусть P/Q – одно из таких приближений; ясно, что $|\pi Q - P| < Q^{-1}$.

При $n = P$ имеем $n \sin n = P \sin(\pi Q + \alpha)$, где $|\alpha| < Q^{-1}$. Поэтому при достаточно больших Q получаем

$$|n \sin n| = P|sin\alpha| \leq P|\alpha| < P/Q < 4,$$

откуда ясно, что при $n = P$ имеет место неравенство $|a_n| > 1/4$.

С другой стороны, для любого натурального k число $(4k+1)\pi$ заключено между некоторыми двумя чётными числами $2n$ и $2n+2$, откуда $n < \pi/2 + 2\pi k < n+1$. Поэтому $\pi/2 - 1 < n - 2\pi k < \pi/2$, то есть $0 < \beta = \sin(\pi/2 - 1) < \sin n < 1$ для таких значений $n = n(k)$. Заметим, что значения n могут быть сколь угодно велики. Поэтому $a_n < 1/(\beta n)$ для этих значений, что означает, что a_n содержит бесконечную подпоследовательность, сходящуюся к нулю.

Принимая во внимание соображения предыдущего абзаца, получаем, что a_n не имеет предела при n стремящемся к бесконечности.

Ответ: нет, не сходится.

7. Пусть $x_0 \neq 0$ — абсцисса точки A; при этом угловой коэффициент прямой AB равен $k = -1/(2x_0)$, с учётом того, что хорда AB перпендикулярна касательной, угловой коэффициент которой равен $2x_0$.

Уравнение прямой AB есть $y = (x - x_0)/(2x_0) + x_0^2$. Для нахождения координат точки B решим уравнение $x^2 = (x - x_0)/(2x_0) + x_0^2$, то есть $x^2 - x_0^2 = (x - x_0)/(2x_0)$. Сокращая на $x - x_0 \neq 0$, имеем $x + x_0 = -1/(2x_0)$ или $x = -x_0 - 1/(2x_0)$.

Тогда $AB^2 = (x - x_0)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 = (x - x_0)^2(1 + (x + x_0^2)^2) = (2x_0 + 1/(2x_0))^2(1 + 1/(2x_0)^2)$, что составляет $(t + 1/t)^2(t + 1/t^2) = t^2 + 3 + 3t^{-2} + t^{-4} = s + 3 + 3s^{-1} + s^{-2}$ при $t = 2x_0$, $s = t^2$.

Вводя обозначение $f(s) = s + 3 + 3s^{-1} + s^{-2}$ и находя производную $f'(s) = 1 - 3s^{-2} - 2s^{-3} = (s+1)^2(s-2)s^{-3}$, мы видим, что $f(s)$ убывает при $0 < s < 2$ и возрастает при $s > 2$. То есть AB^2 принимает наименьшее значение при $s = 2$, и это значение равно $f(2) = 27/4$. Следовательно, наименьшее значение для AB равно $3\sqrt{3}/2$, и достигается оно при $x_0 = \pm\sqrt{2}/2$.

Ответ: $3\sqrt{3}/2$.