

Студенческая олимпиада по математике, 2007 год

1. При каком наименьшем S для любых двух квадратов суммарной площади 1 найдётся прямоугольник площади S в котором можно разместить без наложений указанные квадраты? (Стороны квадратов параллельны сторонам прямоугольника.)

2. В n -мерном кубе взяли n попарно различных точек. Доказать, что существует $(n - 1)$ -мерная грань, проекции на которую всех n точек попарно различны.

3. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/n & 1/n \end{pmatrix}^n.$$

4. Найти математическое ожидание случайной величины $\max(\xi, \eta)$, где ξ, η – независимые равномерно распределённые на отрезке $[0, 1]$ случайные величины.

5. В пространстве дана система из трёх линейно независимых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. При каком максимальном n существует ломаная вида $A_0A_1 \cdots A_n$ такая, что каждый из векторов $A_{i-1}A_i$ ($1 \leq i \leq n$) принимает одно из значений $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, причём никакая из вершин ломаной не является серединой отрезка, соединяющего две другие вершины?

6. Сходится ли последовательность $a_n = 1/(n \sin n)$ при $n \rightarrow \infty$?

7. Каково минимальное расстояние между такими двумя точками A и B параболы $y = x^2$, что касательная к параболе в одной из этих точек перпендикулярна хорде AB ?