1. Дана группа G чётного порядка. Используя лишь элементарные свойства, доказать, что в группе G есть элемент порядка 2.

2. Доказать периодичность функции $f(x)$, если известно, что при всех допустимых значениях x и при некотором $a \neq 0$ выполняется равенство
$$f(x+a) = \frac{\sqrt{3} + f(x)}{1 - \sqrt{3} f(x)}\,.$$

3. Решить уравнение $x^2 + 3y^2 = 1$ в рациональных числах.

4. Невырожденные вещественные квадратные матрицы A, B порядка n назовём ***гомотопными***, если существует вещественная квадратная матрица-функция $\Phi(\lambda)$ порядка n, непрерывная и невырожденная при каждом $\lambda \in [0,1]$ такая, что $\Phi(0) = A$, $\Phi(1) = B$. Доказать, что любая невырожденная вещественная квадратная матрица гомотопна матрице, в каждой строке и в каждом столбце которой лишь один элемент ненулевой и равен 1 или -1.

5. Пусть K_i — круг радиусом r_i с центром $O_i(a_i, b_i)$, где $i = 1, 2$. Объединение $K_1 \cup K_2$ назовём ***звёздным***, если для любой точки $M \in K_1 \cup K_2$ отрезки MO_1, MO_2 целиком лежат в $K_1 \cup K_2$. Найти условия на a_1, b_1, a_2, b_2, r_1, r_2, необходимые и достаточные для того, чтобы объединение $K_1 \cup K_2$ было звёздным.

6. Прямоугольник $m \times n$ разбит на квадраты размером 1×1. В каждом из квадратов разбиения независимым образом выбирается с равной вероятностью одна из четырёх вершин, и из неё как из центра проводится в этом квадрате четверть дуги окружности радиусом $1/2$. Найти математическое ожидание случайной величины, равной количеству возникающих при этом полных окружностей.

7. Сколько существует многочленов вида $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ таких, что их корни (с учётом кратности) равны $a, b, c \in \mathbb{R}$?

8. Доказать, что при всяком $u > 0$ справедливо двойное неравенство
$$\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-u^2/2}\right)} < \int\limits_0^u e^{-x^2/2}\,dx < \sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-u^2}\right)}.$$

9. Дана последовательность $x_0 = a$, $x_{n+1} = a + 1/x_n$ $(n \geq 0)$, где a — натуральное число. Установить, при каких значениях a эта последовательность сходится, и найти её предел.

10. Доказать, что любое ненулевое решение дифференциального уравнения $y'' + xy = 0$ на отрезке $[0, 25]$ имеет не менее 20 нулей. Предлагается использовать следующее утверждение.

    Теорема Штурма. Пусть $q_1(x)$, $q_2(x)$ — непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, где $q_1(x) \leq q_2(x)$ при всех $x \in [a,b]$. Пусть $y_i(x)$ — произвольное ненулевое решение уравнения $y'' + q_i(x)y = 0$ на интервале (a,b), где $i = 1, 2$. Тогда между любыми двумя нулями $y_1(x)$ есть хотя бы один нуль $y_2(x)$.